Κίνδυνος Αγοράς – Η προσέγγιση VaR

- Από το 1998 η BIS ενσωματώνει τον «Κίνδυνο Αγοράς» στον προσδιορισμό των ελάχιστων απαιτούμενων κεφαλαίων μιας τράπεζας
- Αναγνώριση των κινδύνων που προέρχονται από το χαρτοφυλάκιο συναλλαγών (trading book) των τραπεζών
- Ο κίνδυνος προέρχεται από αντίξοες μεταβολές στις τιμές και τις αποδόσεις των αξιογράφων τόσο σε θέσεις χωρίς αντιστάθμιση (ανοικτές θέσεις) όσο και σε ατελείς συσχετίσεις (των αποδόσεων) θέσεων σε αντισταθμισμένες θέσεις.

Κίνδυνος Αγοράς – Η προσέγγιση VaR

- Υπάρχουν 4 κατηγορίες κινδύνου αγοράς:
  - **Κίνδυνος επιτοκίου**: Οι τράπεζες εκ φύσεως έχουν long και short θέσεις σε επιτοκιακά προϊόντα. Αν και οι θέσεις είναι πολλές φορές αντισταθμισμένες ως προς παράλληλες μεταβολές της καμπύλης αποδόσεων (duration hedging), δεν είναι προστατευμένες από μεταβολές στην μορφή της καμπύλης (curve risk). Επιπροσθέτως, ο κίνδυνος προέρχεται από μη τέλειες συσχετίσεις των αποδόσεων σε αντισταθμισμένες θέσεις (basis risk).
  - Κίνδυνος μετοχικών αξιών (equity price risk)
  - Κίνδυνος συναλλαγματικών ισοτιμιών (FX risk) (εμπεριέχει και επιτοκιακό κίνδυνο)
  - Κίνδυνος τιμών εμπορευμάτων (commodity price risk)

VaR

- Η VaR ενός χαρτοφυλακίου ορίζεται σαν η μέγιστη ζημιά που αναμένεται να πραγματοποιηθεί αναφορικά με ένα αξιόγραφο ή χαρτοφυλάκιο αξιογράφων μέσα σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα με μια συγκεκριμένη πιθανότητα. Η VaR είναι λιγότερο αξιόπιστη σαν μέτρο κινδύνου αγοράς για μακρύτερα χρονικά διαστήματα
- Η VaR αποτελεί μια προσπάθεια για να εκτιμηθεί ο συνολικός κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου και να αποδοθεί σε χρηματικούς όρους με έναν και μόνο αριθμό
- Αν μια θέση έχει ημερήσια VaR $10 εκατ. σε επίπεδο εμπιστοσύνης **(c)** 99% σημαίνει ότι θα πραγματοποιηθεί ημερήσια ζημία άνω των $10 εκατ. κατά μέσο όρο μια στις 100 ημέρες

VaR

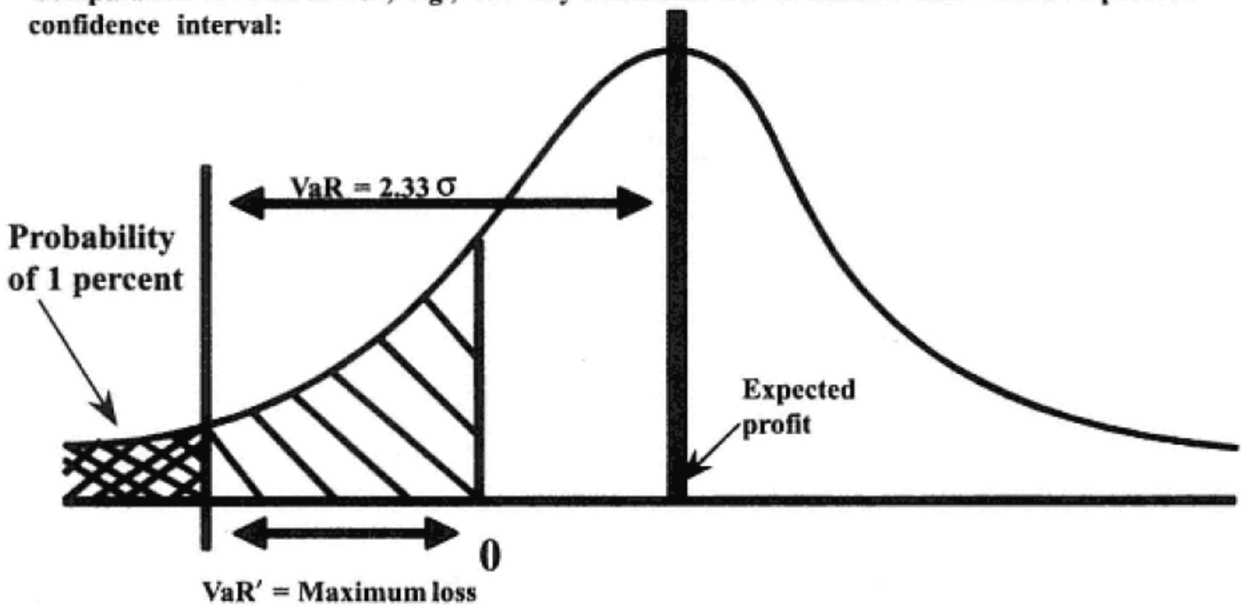
- Η VaR είναι η απάντηση της ερωτήσεως:

- Ποια είναι η μέγιστη ζημία στην διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου (έστω 1 ημέρα) ώστε η πιθανότητα πραγματοποίησης ακόμη μεγαλύτερης ζημίας να είναι μικρή (έστω 1%).
- Για τον υπολογισμό της Var απαιτείται η (forward) κατανομή της αξίας ή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου στον επιλεγμένο χρονικό ορίζοντα.
- Η κατανομή μπορεί να είναι ιστορική (nonparametric VaR) ή αναλυτική, lognormal για αξίες ή normal για αποδόσεις (parametric VaR)

VaR

- Η VaR είναι η απόσταση της μέσης τιμής (αναμενόμενης απόδοσης) του χαρτοφυλακίου και του πρώτου εκατοστημορίου (first percentile) για επίπεδο εμπιστοσύνης 99%
  - VaR= (Expected Profit/Loss) – (worst case loss at the 99% confidence level)
  - VaR=2,33 x σ
- Ένας εναλλακτικός ορισμός VaR' (Absolute VaR) είναι ο εξής:
  - VaR'=Worst case loss at the 99% confidence level
  - VaR'=2,33 x σ – Expected value

Computation of value at risk, e.g., one day maximum loss in market value with a 99 percent confidence interval:



$$VaR = 2.33\ \sigma$$
$$VaR' = 2.33\ \sigma - \text{Expected profit/loss}$$

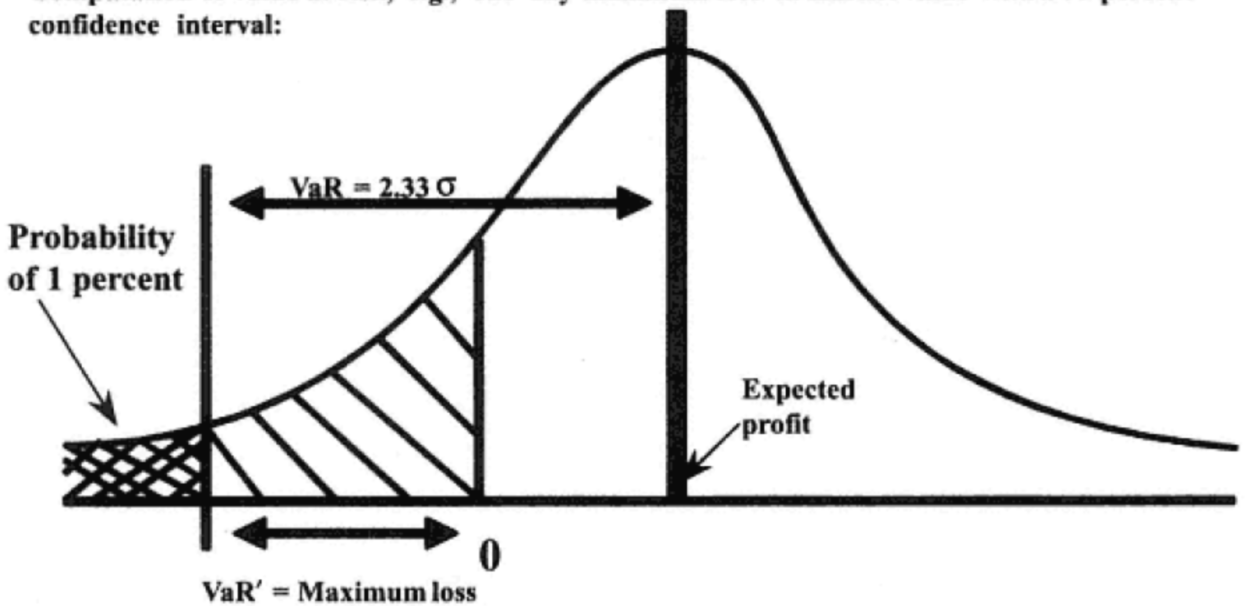
VaR

- Η VaR καθορίζει το οικονομικό κεφάλαιο που απαιτείται να καταβληθεί από τους μετόχους ενός Π.Ι. ώστε να προστατευθεί από χρεοκοπία.
- Ο υπολογισμός του RAROC γίνεται με βάση το Οικονομικό Κεφάλαιο
- Το κανονιστικό πλαίσιο θέτει διαφορετικές τιμές για **(H;c)** από αυτά που χρησιμοποιεί το ίδιο το Ίδρυμα για το οικονομικό του κεφάλαιο. Π.χ. οι τράπεζες θέτουν c= 99,96% αντί για το κανονιστικό 99%. Επίσης, διαφοροποιούν τον επενδυτικό ορίζοντα **H** ανάλογα με την ρευστότητα της θέσης αντί για το κανονιστικό H = 10 ημέρες

VaR

- Έστω V = η τρέχουσα αγοραία αξία της θέσης (χαρτοφυλακίου)
- R = η απόδοση για την περίοδο H
- μ=E(R)
- R^*=η απόδοση για την περίοδο H που αντιστοιχεί στην χειρότερη περίπτωση με πιθανότητα 1-c (c= επίπεδο εμπιστοσύνης, π.χ. 99%)
- $V^*=V(1+R^*)$
- **$VaR(H;c)=E(V)-V^*=V(1+\mu)-V(1+R^*)= V(\mu-R^*)$ (1)**
- Αντίστοιχα
  - **$VaR'(H;c)=-VR^*$ (2)**
  - [$VaR'=V(\mu-R^*)-\mu V= -R*V$

Computation of value at risk, e.g., one day maximum loss in market value with a 99 percent confidence interval:



VaR = 2.33 σ
VaR′ = 2.33 σ – Expected profit/loss

VaR example

- Παράδειγμα:
- $V=100$, $\mu=5\%$, $R^*=-20\%$
- VaR=100 [0,05- (-0,20)]=25
- VaR’=20
  - Αν μ=-0,05 τότε VaR=100 [- 0,05- (-0,20)]=15
  - αλλά VaR’=- (-0,2) x 100=20

Μη παραμετρική VaR

- Δημιουργία (εξαγωγή) της κατανομής αξίας ή αποδόσεων από τις ιστορικές παρατηρήσεις. Π.χ. 10.000 ημερήσιες αποδόσεις.
- Υπολογισμός του 1^{ου} εκατοστημορίου (percentile) της κατανομής. Π.χ. 100 χειρότερες αποδόσεις. Το cut-off point είναι η VaR

Parametric VaR (normal distribution)

- Έστω ότι οι αποδόσεις ακολουθούν μια κατανομή πιθανοτήτων f(R) και από ένα δείγμα ιστορικών δεδομένων εκτιμούμε τις παραμέτρους της κατανομής
- Έστω $R \longrightarrow N(\mu, \sigma^2)$
- $Z=(R-\mu)/\sigma \longrightarrow N(0,1)$
- $R=\sigma Z+ \mu$
- $\text{Prob}\,(R<R^*)=\text{Prob}(\sigma Z + \mu< R^*)=1-c$
- (Αν c είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης έστω 99%)
- $\text{Prob}(Z< (R^*-\mu)/\sigma)=1-c= N[(R^*-\mu)/\sigma]$ (3)
- Αν $R^* = \mu + \alpha \sigma$, τότε $N[(R^*-\mu)/\sigma]=N(\alpha)$

VaR(H,c) – Κανονική κατανομή

- Σύμφωνα με τον ορισμό της VaR και VaR’
- $VaR(H,c)=E(V)-V^{*}=V(1+\mu)-V(1+R^{*})= V(\mu-R^{*})$
- **$VaR(H;c)=-\alpha\ \sigma\ V$ (5)**
- **$VaR'(H;c)=-\ (\alpha\ \sigma + \mu)\ V$ (6)**

Threshold limits (α) as a function of (c)

c	**$\alpha=(R^*-\mu)/\sigma$**
99,97%	-3,43
99,87%	-3,00
99%	-2,33
95%	-1,65

From 1-day VaR to 10-day VaR

- Με την κατανομή των ημερήσιων αποδόσεων υπολογίζουμε την 1-day VaR
- Το κανονιστικό πλαίσιο απαιτεί 10-day VaR
- Υποθέτοντας ότι οι αγορές είναι αποτελεσματικές και
- R_t είναι i.i.d.
- $R(10)=\Sigma^{10}_{t=1} R_t \longrightarrow N(10\mu, 10\sigma^2)$,
- όπου $\mu_{10}=10\mu$ και $\sigma^2_{10}=10\ \sigma^2$
- $VaR(10;c)=10^{0,5}VaR(1;c)$
- Το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν στις αποδόσεις υπάρχει αυτοσυσχέτιση ή τάση επιστροφής στο μέσο

Fat tails

- Όταν η κατανομή των αποδόσεων των αξιογράφων δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή αλλά μια άλλη τύπου t του Student με παχιές ουρές τότε οι portfolio managers ανησυχούν.
- Ευτυχώς αν έχουν στην διαχείρισή τους καλά διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια με παράγοντες κινδύνου οι οποίοι να είναι αρκετά ανεξάρτητοι, χάρις στο Central Limit Theorem, θα εξακολουθούν να χειρίζονται την VaR υποθέτοντας κανονική κατανομή

Var for Managing and Measuring Risk

- Η VaR μας δίνει μια κοινή, συνεπή και ολοκληρωμένη μέτρηση του κινδύνου, για όλους του σχετικούς παράγοντες κινδύνου, όλα τα αξιόγραφα/συμβόλαια για όλες τις κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων
- Η VaR λαμβάνει υπόψη τις συσχετίσεις μεταξύ των διαφορετικών μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν παράγοντες κινδύνου.
- Η VaR σαν μια συγκεντρωτική μέτρηση του κινδύνου και ένα συγκεκριμένο ποσό μπορεί εύκολα να μεταφραστεί σε κεφαλαιακή απαίτηση
- Η VaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην δομή αμοιβών των τραπεζικών στελεχών με βάση τον δείκτη RAROC
- Η VaR χρησιμοποιείται και για να τεθούν όρια θέσης αλλά και συγκεντρωτικά

Πως υπολογίζεται η VaR;

- Αναλυτική Μέθοδος
  - Γραμμικό υπόδειγμα (παράδειγμα με μετοχές και ομόλογο)
  - Μη γραμμικό (quadratic) για δικαιώματα
- Historical Simulation
- Monte Carlo
- Όλες οι προσεγγίσεις απαιτούν δύο προκαταρτικά βήματα:
  - Επιλογή των παραγόντων κινδύνου
  - Επιλογή της μεθοδολογίας και του υποδείγματος που διέπει τις μεταβολές των παραγόντων κινδύνου

Analytic Variance Covariance approach: Portfolio linear in risks

- Χαρτοφυλάκιο 2 μετοχών Microsoft και Exxon
- $V=n_1 S_1 + n_2 S_2$ (n ο αριθμός των μετοχών και S η τιμή)
- $R_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{n_1 S_1}{V}\frac{\Delta S_1}{S_1} + \frac{n_2 S_2}{V}\frac{\Delta S_2}{S_2} = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 = \sum_{i=1}^{2} \omega_i R_i$
- Όπου $R_i = \frac{\Delta S_i}{S_i}$ και $\sum_{i=1}^{2} \omega_i = 1$
- ω_i είναι το % του χαρτοφυλακίου που είναι επενδυμένο στη μετοχή i
- Οι τιμές είναι lognormal και οι αποδόσεις normal
- $R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \cong \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}}$
- Οι αποδόσεις των 2 μετοχών ακολουθούν πολυμεταβλητή κανονική κατανομή με μ_i σ_i και συντελεστή συσχέτισης ρ

Portfolio Var

- **Από τις οριακές κατανομές…**
- $VaR_i(1;99) = 2{,}33\ \sigma_i\ S_i$
- $VaR_i(10;99) = \sqrt{10}\ VaR_i(1;99) = 2{,}33\ \sqrt{10}\ \sigma_i\ S_i$
- $R_V \sim N(\mu_{V,}\ \sigma_V)$
- $\boldsymbol{\mu_V} = \sum_{i=1}^{2} \omega_i\ \ \mu_i$
- $\boldsymbol{\sigma_V} = \omega_1^2\ \sigma_1^2 + \omega_2^2\ \sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\ cov(R_1, R_2)_=$
- $(\omega_1 \quad \omega_2)\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\ \ \sigma_2 \\ \rho\sigma_1\ \ \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} =$
- $=(\omega_1 \quad \omega_2)\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} =$
- $w\Omega w^T = \mathbf{w}\ \boldsymbol{\sigma}\ C\ \boldsymbol{\sigma}\ \mathbf{w}^T$
- οπου Ω variance-covariance matrix και C ο πίνακα συσχετίσεων

Portfolio Var linear in risks

- $VaR_V(1;99)= 2,33\ \sigma_V\ V$
- $VaR_V(10;99)= \sqrt{10}\ VaR_V(1;99)= 2,33\ \sqrt{10}\ \sigma_V\ V$
- $VaR_V(1;99)= 2,33\ [\mathbf{w}\ \boldsymbol{\sigma}\ C\ \boldsymbol{\sigma}\ \mathbf{w}^T]^{½}\ V = [\mathbf{VaR}\ C\ \mathbf{VaR}^T]^{1/2}$

- Όπου **w σ** και **VaR είναι διανύσματα**
- Αν ρ =1 τότε η VaR του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με το άθροισμα των VaR των δύο μετοχών

- Έστω ημερήσιες αποδόσεις μετοχών με
- μ_1=0,155%, μ_2=0,0338%
- σ_1=2,42%, σ_2=1,68%
- Και ρ=0,14
- Το χαρτοφυλάκιο αποτελείτε από 100 μετοχές της Microsoft και 120 μετοχές της Exxon με τιμές $91,7 και $79,1 αντίστοιχα

Portfolio VaR for different ρ's

ρ	VaR(1;99) ($)	Portfolio effect ($)
+1	887	0
0,5	772	115
0	636	251
-0,5	461	426
-1	146	741

Zero coupon OATs (Obligations assimilables du Trésor)

- Ονομαστική αξίας 100 εκατ. Euro
- y_{10} =7,96%
- ακολουθεί κανονική κατανομή με ημερήσια σ (y) =0,0963%.
- P_B =100 / 1,0796 ^{10} = 46,491 euro
- Υποθέτουμε ότι η μεταβολή (d P_B) της τιμής προσδιορίζεται από το υπόδειγμα της duration
- d P_B= - P_B x D/(1+y) x dy= -430,63 dy
- Υποθέστε ότι d (P_B) ακολουθεί κανονική κατανομή με ημερήσια μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) σ (P_B)
- σ (P_B)= - P_B x D/(1+y) x σ (y)= 0,415 εκατ. Euro
- VaR(1;99)= 2,33 x σ (P_B)= 2,33 x 0,415=0,967 εκατ. euro
- VaR(10;99)= $10^{0,5}$x VaR(1;99)=3,06 εκατ. euro

Historical or Back Simulation

- Ιστορική Προσομοίωση (Historical or Back Simulation)
  - Απαιτούνται ημερήσιες παρατηρήσεις για τις μεταβολές στις τιμές των μεταβλητών που καθορίζουν την αξία του χαρτοφυλακίου μας (έστω οι 250 ή 500 τελευταίες ημερήσιες παρατηρήσεις, επίπεδο εμπιστοσύνης 99%)
  - Για κάθε ένα από τα 250 ή 500 σενάρια μεταβολής στην τρέχουσα τιμή του παράγοντα κινδύνου υπολογίζουμε την ημερήσια μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου μας

Historical Simulation

- Οι 250 ή 500 τιμές αποτελούν μια εμπειρική κατανομή των ημερήσιων μεταβολών στη αξία του χαρτοφυλακίου μας. Δημιουργούμε το ιστόγραμμα της αξίας του χαρτοφυλακίου μας
- Η 5η χειρότερη ημερήσια μεταβολή αντιστοιχεί στο 1% της κατανομής (αν είχαμε 500 παρατηρήσεις)
- Η εκτίμηση της VaR είναι η ζημία που αντιστοιχεί στο 1% της κατανομής

Historical Simulation example

- Έστω ότι το χαρτοφυλάκιό μας αποτελείται από **3μηνο δικαίωμα αγοράς** στην ισοτιμία μάρκου δολαρίου ($US/DM)
- Οι παράγοντες κινδύνου είναι:
  - Η ισοτιμία ($US/DM)
  - Το 3μηνο επιτόκιο $
  - Το 3μηνο επιτόκιο DM
  - Η 3μηνη συνεπαγόμενη μεταβλητότητα της ισοτιμίας ($US/DM)

(έστω ότι αφήνουμε εκτός αναφοράς τον επιτοκιακό κίνδυνο)

(έστω οι τελευταίες 100 ημερήσιες παρατηρήσεις)

(χρησιμοποιούμε το υπόδειγμα BS προσαρμοσμένο από τους Garman-Kholhagen για την τιμή του call)

Historical or Back Simulation

TABLE 5.5
Historical Market Values for the Risk Factors Over the Last 100 Days

Day (t)	**\$US/DM** (FX_t)	**FX Volatility** (σ_t)
–100	1.3970	0.149
–99	1.3960	0.149
–98	1.3973	0.151
. . .	. . .	. . .
–2	1.4015	0.163
–1	1.4024	0.164

Historical or Back Simulation VaR

TABLE 5.6
Simulating Portfolio Values Using Historical Data (Current Value of the Portfolio: $1.80)

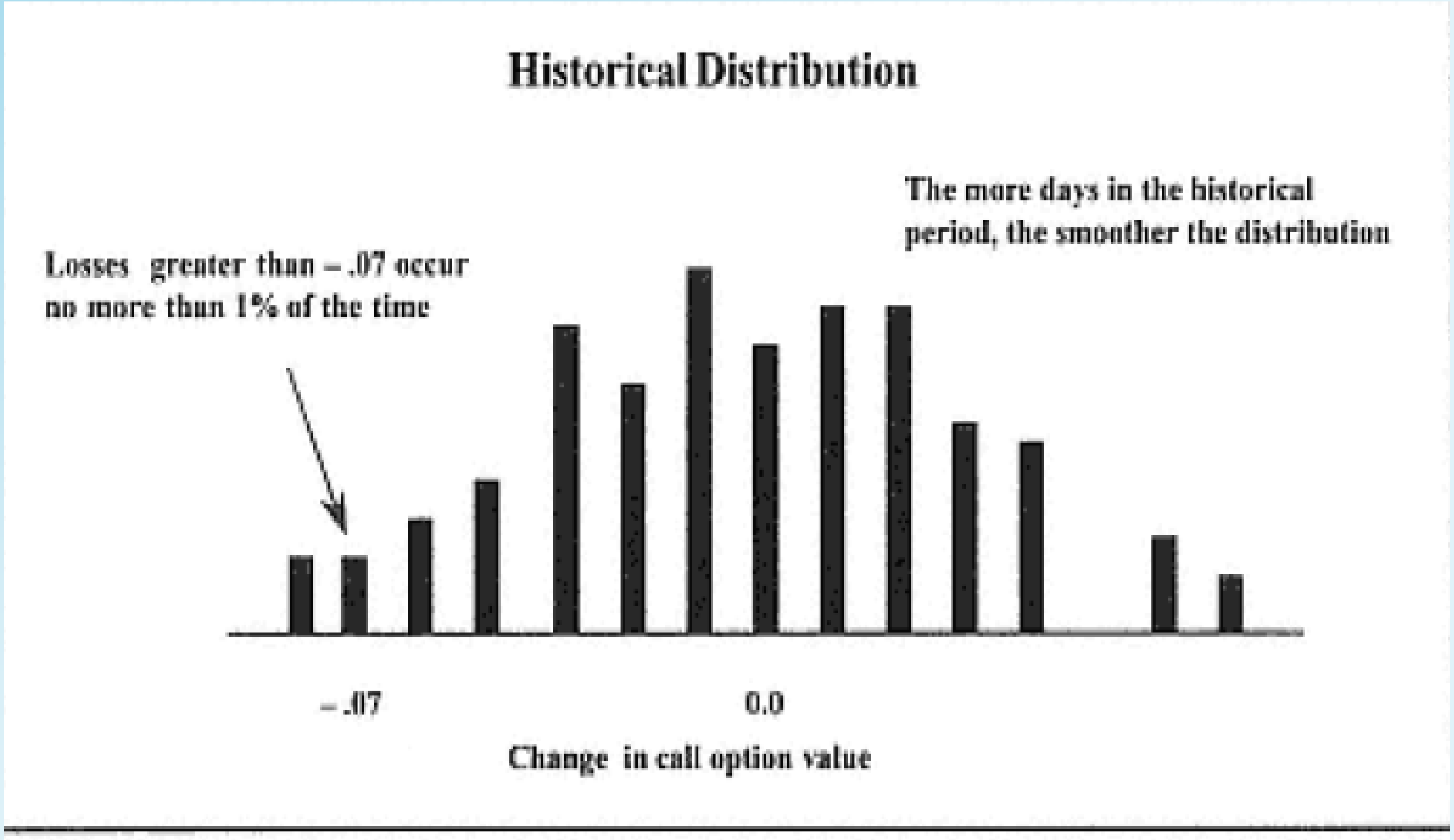
		Change from Current Value ($1.80)
Alternate price 100 = $C(FX_{100}; \sigma_{100})$	= $1.75	–$0.05
Alternate price 99 = $C(FX_{99}; \sigma_{99})$	= $1.73	–$0.07
Alternate price 98 = $C(FX_{98}; \sigma_{98})$	= $1.69	–$0.11
. . . .		
Alternate price 2 = $C(FX_{2}; \sigma_{2})$	= $1.87	+$0.07
Alternate price 1 = $C(FX_{1}; \sigma_{1})$	= $1.88	+$0.08

Historical or Back Simulation VaR

TABLE 5.7
Identifying the First Percentile of the Historical Distribution of the Portfolio Return

Rank	Change from Current Value
100	–$0.11
99	–$0.07
98	–$0.05
. . .	. . .
2	+$0.07
1	+$0.08

VaR is for managing…



Πως υπολογίζεται η VaR;

- MONTE CARLO SIMULATION
- STRESS TESTING
- BACK TESTING