Οικονομική της Ασφάλισης

Υπολογιστικά θέματα Αναμενόμενης Χρησιμότητας

Η θεωρία της αναμενόμενης χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο αριθμητικών ασκήσεων που εξετάζουν την κατανόηση και βασικές μαθηματικές δεξιότητες. **Τέτοιες ασκήσεις μπορεί να πλαισιώσουν και θέματα εξετάσεων.**

Ακολουθεί σειρά λυμένων ασκήσεων που δίνουν μια ιδέα του πώς προσεγγίζονται τέτοιες ασκήσεις. ***Οι ασκήσεις αυτές θα πρέπει να διαβαστούν παράλληλα με τις σημειώσεις της ενότητας 3 και 4.***

Πολλαπλής επιλογής

1. Ένα άτομο έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u(x) = lne^{x}$. Εάν είναι πολύ τυχερός κερδίζει 100€ , εάν είναι τυχερός κερδίζει 30 ενώ άμα είναι άτυχος κερδίζει 20€. Είναι άτυχος με πιθανότητα 20% και πολύ τυχερός με πιθανότητα 30%. Η αναμενόμενη χρησιμότητα είναι:

   (α) 16 (b) 49 (c) 87.2 (d) 9.2 (e) 0 (f) δεν υπάρχει λύση

   Λύση

$$EU = 0.2u(20) + 0.3u(100) + 0.5u(30) =$$
$$0.2(lne^{20}) + 0.3(lne^{100}) + 0.5(lne^{30}) = 49$$

2. Ένας επενδυτής με συνάρτηση χρησιμότητας $u(w) = \ln(w)$και πλούτο ίσο με 4€ ποντάρει 2€ σε μια μετοχή. Για να ποντάρει στην μετοχή η ελάχιστη πιθανότητα να κερδίσει είναι:

   (α) 0.5 (b) 1.09 (c) 0.63 (d) 0.69 (e)0 (f) δεν υπάρχει λύση

   Λύση

$$EU = 0 \rightarrow$$
$$EU = pu(w+2) + (1-p)u(w-2) = 0 \rightarrow$$
$$EU = pu(4+2) + (1-p)u(4-2) = 0 \rightarrow$$
$$EU = pln(6) + (1-p)\ln(2) = 0 \rightarrow$$
$$pln(6) + \ln(2) - p\ln(2) = 0 \rightarrow$$
$$p = 0.63$$

3. Η συνάρτηση χρησιμότητας κάποιου είναι U(W)=3W. Ο πλούτος του είναι 3000 € και έχει 10% πιθανότητα να τα χάσει όλα εξαιτίας ενός ζημιογόνου ενδεχομένου. Το μέγιστο ποσό ασφάλισης που είναι διατεθειμένος να πληρώσει για πλήρη ασφάλιση είναι:
   a. 100 €
   b. 200 €
   c. 300 €
   d. 600 €
   e. 900 €

Λύση

$$U(w) = 3w \rightarrow$$

Για να βρούμε την στάση του ατόμου απέναντι στο ρίσκο υπολογίζουμε την

$$U''(w) \rightarrow U''(w) = 0 \rightarrow ουδέτερος\ στο\ ρίσκο \frac{}{} risk\ neutral$$

Η αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$EV = 0.1(3000) + 0.9(0) = 300$$

Αφού είναι ουδέτερος στο ρίσκο (risk neutral), η μέγιστη τιμή θα είναι ίση με 300 €

4. Στην θεωρία παιγνίων, η κατάσταση κατά την οποία ο ένας παίκτης μπορεί να κερδίσει αυτό που ο άλλος χάνει, λέγεται:
   a. Δίλλημα του φυλακισμένου
   b. Μάχη των φύλων
   c. Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος
   d. S.O.S. Μόσχα καλεί Πεντάγωνο

5. Κάποιος που αποστρέφεται τον κίνδυνο έχει συνάρτηση χρησιμότητας που παρουσιάζει:
   a. Σταθερή οριακή χρησιμότητα του πλούτου
   b. Μηδενική οριακή χρησιμότητα του πλούτου
   c. Αυξανόμενη οριακή χρησιμότητα του πλούτου
   d. Μειούμενη οριακή χρησιμότητα του πλούτου

   Δηλαδή *κυρτή* συνάρτηση χρησιμότητας. €100 αξίζουν περισσότερο αν είσαι φτωχός παρά αν είσαι δισεκατομμυριούχος.
   Αν ήταν ουδέτερος θα ήταν γραμμική (σταθερή οριακή χρησιμότητα).

6. Για κάποιον με πλούτο 10000 € η ανταγωνιστική τιμή για πλήρη ασφάλιση έναντι ζημιάς 3600 € με πιθανότητα 50% είναι:
   a. 1800 €
   b. 1900 €
   c. 3200 €
   d. 5000 €
   e. Τίποτα από τα παραπάνω

Λύση

Η αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$EV = 0.5(3600) + 0.5(0) = 1800$$

Άρα η ανταγωνιστική τιμή θα είναι 1800 €

7. Η συνάρτηση χρησιμότητας κάποιου είναι U(W)=W^2. Ο πλούτος του είναι 560 € και έχει 50% πιθανότητα να χάσει 480 € εξαιτίας ενός ζημιογόνου ενδεχομένου. Το μέγιστο ποσό ασφάλισης που είναι διατεθειμένος να πληρώσει είναι:
   a. 160 €

b. 360 €
c. 240 €
d. 200 €
e. Τίποτα από τα παραπάνω

Λύση

$$U(w) = w^2 \rightarrow$$

Για να βρούμε την στάση του ατόμου απέναντι στο ρίσκο υπολογίζουμε την

$$U''(w) > 0 \rightarrow επιδιώκει\ ρίσκο\ risk\ lover$$

Η αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$EV = 0.5(560) + 0.5(80) = 320$$

Αφού risk lover, η μέγιστη τιμή θα είναι *μικρότερη* από 320 €

8. Σε ένα πείραμα ζήτησαν από τους συμμετέχοντες να διαλέξουν ένα από τα δύο, (α) 1εκ.€ σίγουρα ή (β) 3 εκ.€ με πιθανότητα 50%. Οι περισσότεροι διάλεξαν το (α). Παραβιάζει η στάση αυτή την θεωρία των von Neumann και Morgenstern; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. Σημαίνει αυτό ότι δεν ισχύει ο ορθολογισμός και συνεπώς δεν λειτουργεί το 'αόρατο χέρι' και η αγορά ασφάλισης;

Λύση

Ορθολογισμός -> μεγιστοποίηση χρησιμότητας
Δηλαδή, Αναμενόμενη τιμή (β) μεγαλύτερη από (α)
Επιλογή (α)-> αποστροφή στο ρίσκο risk aversion

9. Ο Αρης και η Βούλα προβληματίζονται αν θα παντρευτούν. Η Βούλα δηλώνει ότι πάντοτε ακολουθεί την αναμενόμενη ωφέλεια και μεγιστοποιεί τον λογάριθμο του εισοδήματός της. Ο Αρης συμφωνεί αλλά προσθέτει ότι εκείνος μεγιστοποιεί την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου του εισοδήματός του. Η Βούλα λέει: 'Με τέτοιες διαφορές στην στάση απέναντι στο ρίσκο, δυστυχώς χωρίζουμε'. Ο Αρης διαμαρτύρεται λέγοντας ότι το τετράγωνο είναι απλή μονοτονική μετατροπή του λογαρίθμου, και άρα οι διαφορές δεν είναι ουσιαστικές. Ποιος έχει δίκιο;
   a. Ο Αρης.
   b. Η Βούλα.
   c. Ο Αρης έχει δίκιο για μεγάλα ρίσκα και άδικο για μικρά
   d. Η Βούλα έχει δίκιο για μικρά ρίσκα και άδικο για μεγάλα.
   e. Και οι δύο έχουν άδικο

   Λύση

   Βούλα -> $u(x) = \ln(x)$-> risk averse Αποστρέφεται το ρίσκο
   Άρης-> $u(x) = x^2$-> risk lover επιδιώκει το ρίσκο
   Αρα έχει η Βούλα δίκιο γιατί δεν θα συμφωνούν ποτέ.

10. Ο Γιώργος Σούζας έχει μια Φεράρι που αξίζει €100.000. Είναι ιδιαίτερα απρόσκεκτος και αφήνει τις πόρτες ανοικτές και το κλειδί στην μηχανή με αποτέλεσμα η πιθανότητα κλοπής να είναι 0,5. Αν η Φεράρι κλαπεί, ξέρει ότι δεν θα την πάρει πίσω ποτέ. Ο Γιώργος έχει και άλλη περιουσία ύψους €100.000 και η εξίσωση χρησιμότητας von-Neumann

Morgenstern για περιουσία είναι u(W)=ln (W). Αν ο ΓΣ μπορεί αν ασφαλίσει ένα ποσό €K με ασφάλιστρο €0,6K. Πόση ασφάλιση θα αγοράσει;

a. €0
b. €100.000
c. Περισσότερο από €0 αλλά λιγότερο από €50.000.
d. Περισσότερο από €50.000 αλλά λιγότερο από €100.000.
e. Ακριβώς €50,000.

Λύση

Πλούτος =100.000
Αμάξι =100.000
Συνολικός πλούτος (W)=200.000
Ζημία (L)=100.000
Πιθανότητα (p)=0.5

$$E(W) = (1-p)W + p\,(W-L) = 0.5(200.000) + 0.5(100.000) = 150.000$$

Χωρίς ασφάλιση

$$EU = (1-p)u(W) + (p)u(W-L) = 0.5\ln(200.000) + 0.5\ln(100.000)$$
$$= 6.10 + 5.76 = 11.86$$

Με ασφάλιση

Η ασφάλιση(C) κοστίζει €0.6K άρα

$$U(W-C) = 11.86 \rightarrow \ln(200.000 - 0.6K) = 11.86 \rightarrow 200.000 - 0.6K$$
$$= 141.492 \rightarrow K = \frac{200.000 - 141.492}{0.6} \rightarrow$$
$$K = 97.512$$

Άρα θα αγοράσει κάλυψη για €97.512

11. Σε πείραμα της στάσης στο ρίσκο, δόθηκε η επιλογή: Α) Χάνουν $100 σίγουρα Β) 50% πιθανότητα να κερδίσουν $50, 50% πιθανότητα να χάσουν $200. Η πλειοψηφία διάλεξε το Β. πώς εξηγείται αυτό;

a. Οι άνθρωποι έχουν περισσότερη αποστροφή στην απώλεια παρά στο ρίσκο
b. Το Β έχει μικρότερη αναμενόμενη απώλεια από το Α.
c. Το παράδειγμα είναι συμβατό με την αποστροφή του ρίσκου στις απώλειες
d. Το Β έχει αναμενόμενο κέρδος σε αντίθεση με την σίγουρη απώλεια του Α
e. Η συμπεριφορά αυτά παραβιάζει το Βασικό Αξίωμα της Εκφρασμένης Προτίμηση

Λύση

Η επιλογή του Β, καταδεικνύει την τάση των ατόμων να δίνουν μεγαλύτερο βάρος στα πιθανά κέρδη έναντι ορισμένων ζημιών. Σχέση με συμπεριφορές που χαρακτηρίζονται από αποστροφή στον κίνδυνο. (Κυρτές προτιμήσεις)

12. Ο Ζήσης Αλογομούρης έχει αποστροφή στο ρίσκο. Μπορεί να συμμετέχει σε στοίχημα όπου με πιθανότητα ¼ θα χάσει €1000 και με πιθανότητα ¾ θα κερδίσει €500.

a. Αφού αποστρέφεται το ρίσκο δεν θα στοιχηματίσει σε καμιά περίπτωση.

b. Αφού η αναμενόμενη αξία είναι θετική θα στοιχηματίσει.
c. Αν τα αρχικά του περιουσιακά στοιχεία είναι άνω του €1500 θα στοιχηματίσει.
d. Αν τα αρχικά του περιουσιακά στοιχεία είναι κάτω του €1500, τότε θα στοιχηματίσει.
e. Δεν υπάρχει επαρκής πληροφόρηση για να εκτιμήσουμε αν θα στοιχηματίσει ή όχι.

Εξηγείστε την επιλογή σας.

Λύση

- Θετική αναμενόμενη τιμή E(X)=125€
- Συνάρτηση χρησιμότητας της μορφής ln(x)
    - EU=0.25·U(I−1000)+0.75·U(I+500)
    - EU<U(I) ακόμα και για θετικά E(X)

13. Η περιουσία της Ηλέκτρας είναι €600, αλλά υπάρχει μια πιθανότητα 0,25 ότι θα χάσει €100. Η Ηλέκτρα είναι ουδέτερη απέναντι στον κίνδυνο. Της προσφέρεται ασφάλιση η οποία θα την αποζημιώσει πλήρως για την απώλειά της.
    a. Η Ηλέκτρα θα ήταν διατεθειμένη να πληρώσει λίγο περισσότερο από €25 για να ασφαλιστεί
    b. Η Ηλέκτρα θα πλήρωνε ως €25 για την ασφάλιση αυτή.
    c. Δεδομένου ότι η Ηλέκτρα είναι ουδέτερη απέναντι στον κίνδυνο, δεν θα πλήρωνε τίποτε για να ασφαλιστεί.
    d. Αφού δεν γνωρίζουμε την ακριβή συνάρτηση χρησιμότητας της Ηλέκτρας, αδυνατούμε να εκφράσουμε γνώμη για κάποια τιμή.
    e. Η Ηλέκτρα δεν θα πλήρωνε περισσότερο από € 16,66 για την ασφάλιση.

    Λύση

    Η Ηλέκτρα είναι ουδέτερη απέναντι στον κίνδυνο

    $$U(w) \rightarrow risk\ neutral$$

    Η αναμενόμενη τιμή θα είναι

    $$EV = 0.25(100) = 25$$

    Άρα, το μέγιστο ποσό που είναι διατεθειμένη να δώσει είναι €25

14. Ο μεγάλος ποδοσφαιριστής Kalã έχει προτιμήσεις von-Neumann Morgenstern με συνάρτηση χρησιμότητας $U(c)= c^{½}$. Αν ο Kalã καταφέρει να μην τραυματιστεί σε αυτό το πρωτάθλημα, το εισόδημά του θα είναι €2.5 εκ. Αν τραυματιστεί το εισόδημά του θα περιοριστεί στα έσοδα από πωλήσεις ποπ-κορν στους αγώνες, δηλαδή €100,000. Η πιθανότητα τραυματισμού είναι 0,1 και η πιθανότητα αρτιμέλειας 0,9. Η αναμενόμενη χρησιμότητα του Kalã είναι
    a. 100.000
    b. 9.020
    c. Μεταξύ 24 εκ και 25 εκ.
    d. 4,510

e. 18.040

Λύση

Η αναμενόμενη χρησιμότητα θα είναι

$EU = 0.9u(25) + 0.1u(1) = 0.9\,(25^{0.5}) + 0.1(1^{0.5}) = 4.5 + 0.1 = 4.51$

15. Η Νίκη έχει προτιμήσεις von-Neumann Morgenstern $U(c_A, c_B, p_A, p_B) = p_A\, v(c_A) + p_B\, v(c_B)$, όπου p_A και p_B είναι πιθανότητες των γεγονότων Α και Β και c_A και c_B είναι καταναλώσεις εξαρτώμενες αν θα προκύψει το γεγονός Α ή Β αντιστοίχως. Για c<€2.000, v(c)=2c kai gia c>€2.000, v(c)=2.000+c.
    a. Για στοιχήματα που δεν έχουν πιθανότητα να οδηγήσουν στην περιουσία της να υπερβεί τα €2000, η Νίκη θα αγοράσει κάθε λαχείο που έχει θετική αναμενόμενη καθαρή αξία.
    b. Η Νίκη θα αποστρέφεται τον κίνδυνο αν η περιουσία της είναι μικρότερη από €2000 και θα τον επιδιώκει αν η περιουσία της είναι μεγαλύτερη από €2.000.
    c. Η Νίκη θα είναι ουδέτερη απέναντι στο ρίσκο αν αν η περιουσία της είναι μικρότερη από €2000 και θα τον αποστρέφεται αν η περιουσία της μεγαλύτερη από €2.000.
    d. Η Νίκη δεν θα δεχτεί κανένα στοίχημα αν υπάρχει πιθανότητα ότι θα καταλήξει να της αφήσει περιουσία λιγότερη από €4000.
    e. Κανένα από τα παραπάνω.

Λύση

- Συνάρτηση χρησιμότητας risk neutral
- Σύγκριση με αναμενόμενη τιμή E(X)

16. Ο Παύλος έχει εξίσωση χρησιμότητας $U(c_1, c_2) = \min\{c_1, c_2\}$, όπου c_1 και c_2 είναι η κατανάλωσή του στην περίοδο 1 και περίοδο 2 αντίστοιχα. Ο Παύλος έχει εισόδημα €189 την περίοδο 1 και €63 την περίοδο 2, ενώ δεν υπάρχει αβεβαιότητα. Μπορεί να δανειστεί ή να δανείσει με επιτόκιο 10%. Δεν υπάρχει πληθωρισμός.
    a. Θα αποταμιεύσει €60
    b. Θα δανειστεί €60
    c. Ούτε θα δανείσει ούτε θα δανειστεί
    d. Θα αποταμιεύσει €124
    e. Τίποτε από τα παραπάνω.

Λύση

Έστω $y_1 = 189, y_2 = 63, r = 0.1$

- Εισοδηματικός περιορισμός

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \rightarrow$$

$$c_1 + \frac{c_2}{1.1} = 189 + \frac{63}{1.1} \rightarrow$$

$$c_1 + \frac{c_2}{1.1} = 246.27 \rightarrow 1.1c_1 + c_2 = 271$$

- Μεγιστοποίηση συνάρτησης χρησιμότητας

  Ο Παύλος για να μεγιστοποιήσει την $U(c_1, c_2) = \min\{c_1, c_2\}$ θα θεωρήσει $c_1 = c_2$ καθώς επιθυμεί ίδια κατανάλωση στα 2 έτη. Άρα,

$$1.1c_1 + c_1 = 271 \rightarrow 2.1c_1 = 271 \rightarrow c_1 = 129.05$$

  Οπότε θα καταναλώσει την περίοδο 1 129€ από τα συνολικά €189 με αποτέλεσμα να αποταμιεύσει €60